Расчет веревки-амортизатора

Общее описание схемы и постановка задачи.
Альпинист работает на отвесной стене на основной веревке, к которой он прикреплен усом определенной длины (l) с помощью зажима. Сама основная веревка имеет верхнее анкерное крепление. Имеется возможность срыва альпиниста с фактором рывка 2. Определить длину веревки от перемещаемого зажима до точки анкерного крепления, достаточную для полного поглощения энергии рывка при возможном срыве.

Допущения.
1. Основная веревка приравнивается к резиновому стержню аналогичных прочностных параметров и геометрических размеров согласно существующим европейским требованиям prEN 1891 для статических верёвок.
2. Ус приравнивается к абсолютно жесткому металлическому тросу или цепи.

Решение.
1. Согласно закону сохранения энергии (если считать падение свободным, т.е. без контакта с поверхностью, и пренебречь несущественными силами сопротивления воздушной среды, а также работой силы реакции в точке анкерного крепления), вся кинетическая энергия падающего тела должна перераспределиться между тремя составляющими: энергией рывка, воздействующего на данное тело, и энергией компенсации (потенциальная энергия упругой деформации), возникающей при растяжении веревки:

$$W_1 = W_2 + W_3$$

где: W_1 - кинетическая энергия падающего тела, Дж;
W_2 - энергия рывка, воздействующая на тело и деформирующая его, Дж;
W_3 - энергия упругой деформации основной веревки, Дж.

2. Определяем энергию (W_1), возникающую при падении альпиниста с фактором рывка 2 (самый неблагоприятный случай) по формуле:

$$W_1 = mgH = mg\Phi l$$

где: m - масса альпиниста, кг;
H - высота падения, м;
Φ - фактор рывка;
l - длина жесткого уса, м.

Отсюда, при длине уса в 0,5 м и массе тела альпиниста в 100 кг, получим:

$$W_1 = mg\Phi l = 100 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 1000 \text{ (Дж)}$$

3. Определяем силу рывка (T), с которой тело альпиниста должно воздействовать на «жесткий» ус в момент падения, исходя из равенства импульсов сил падающего тела и растяжения «жесткого» уса и при нулевой скорости в момент срыва, по формуле:

$$T\tau = m(v - v_0)\Big|_{v_0 = 0} = mv$$

где: τ - время воздействия импульса силы на «жесткий» ус в нижнем положении, сек.;
v - скорость падения тела альпиниста в нижней точке, м/с.

Учитывая, что $H = \Phi l = H_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}\Bigg|\begin{matrix} H_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{matrix}$, где t - время падения тела, скорость падения тела в нижней точке будет равна:

$$v = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{gt^2}{2}\right) = gt = g\sqrt{\frac{2\Phi l}{g}} = \sqrt{2g\Phi l}$$

Отсюда сила рывка, воздействующего на «жесткий» ус, будет равна:

$$T = \frac{mv}{\tau} = \frac{m\sqrt{2g\Phi l}}{\tau}$$

4. С другой стороны, силу рывка как динамического взаимодействия можно определить следующим образом:

$$T = K_D mg = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{a_{CT}}}\right)mg = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Phi l}{a_{CT}}}\right)mg$$

где: K_D - динамический коэффициент;

a_{CT} - статическая деформация (удлинение) уса при прикладываемой нагрузке, м.

Учитывая, что коэффициент растяжения уса (как металлического троса или цепи) не превышает 3%, можно принять максимальную статическую деформацию равной:

$$a_{CT} = \eta l$$

где: η - предельный коэффициент растяжения уса.

Отсюда, приравняв оба выражения, получим:

$$\frac{m\sqrt{2g\Phi l}}{\tau} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Phi l}{\eta l}}\right)mg;$$

$$\tau = \frac{m\sqrt{2g\Phi l}}{mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{\eta}}\right)} = \frac{\sqrt{2\Phi l}}{\sqrt{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{\eta}}\right)}$$

Отсюда: $\tau = \frac{\sqrt{2\Phi l}}{\sqrt{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{\eta}}\right)} = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 0{,}5}}{\sqrt{10}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0{,}03}}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3{,}2 \cdot 12{,}6} = 0{,}04$ (сек.)

Отсюда усилие рывка в усе составит:

$$T = \frac{m\sqrt{2g\Phi l}}{\tau} = \frac{100\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}5}}{0{,}04} = 11180 \text{ (Н)}$$

5. Учитывая, что «жесткий» ус выступает как безинерционное передаточное звено, и у него практически полностью отсутствует способность аккумулировать механическую энергию, вся энергия рывка должна мгновенно перераспределиться на энергию, выделяемую на деформацию тела, и энергию компенсации (потенциальную энергию упругой деформации), возникающей при растяжении основной веревки. При этом энергия, идущая на растяжение основной веревки будет равна:

$$W_3 = W_1 - W_2$$

где: W_1 - кинетическая энергия падающего тела, Дж;

W_2 - работа (энергия), совершаемая силой рывка, воздействующего на тело и приводящего к его деформации, Дж;

.

6. Определим часть энергии, что идет на деформацию тела, учитывая, что максимальное значение (по нормам) рывка должно быть не более $F_{\max} = 600$ кгс = 6000 Н.
Отсюда допустимая работа сил рывка будет равна:

$$W_2 = F_{\max} S$$

где: S - перемещение (деформация) тела относительно точки крепления к усу в момент его торможения, м.

Приняв в качестве перемещения величину деформации уса (3% от его длины, хотя в реальности она может быть и меньше), а именно на этом участке происходит активное торможение и деформация тела с перераспределением кинетической энергии, получим:

$$W_2 = F_{\max} S = F_{\max} \eta l = 6000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}5 = 90 \text{ (Дж)}$$

Отсюда энергия, передаваемая основной веревке и требующая компенсации, равна:

$$W_3 = W_1 - W_2 = 1000 - 90 = 910 \text{ (Дж)}$$

Таким образом, еще раз повторим, что если использовать принцип суперпозиции (т.е. оценивать результирующий фактор как сумму отдельно образующих ситуацию факторов), можно утверждать, что:
- на веревку в месте крепления зажима действует рывок, численно равный 11180 Н;
- время действия указанного рывка составляет 0,04 сек.;
- при этом основной веревке передается энергия в 910 Дж.

7. Потенциальная энергия упругой деформации веревки (при относительно малых деформациях, т.е. при допущении, что веревка работает (как стержень) только в прочностном диапазоне, описываемом законом Гука), определяется следующим образом:

$$W_3 = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

где: k - коэффициент упругости веревки, Н/м;
ΔL - наибольшее абсолютное растяжение веревки, м.

Если ввести переменную коэффициента эластичности веревки $\psi = \frac{1}{k}$, то последняя формула примет следующий вид: $W_3 = \frac{\Delta L^2}{2\psi}$.

Отсюда следует, что потенциальная энергия упругой деформации веревки прямо пропорциональна ее удельной упругости, и обратно пропорциональна удельной эластичности.

С другой стороны, известно, что абсолютное удлинение веревки можно выразить через ее относительное удлинение и общую длину по формуле:

$$\Delta L = \delta L$$

где: δ - относительное удлинение веревки;
L - общая длина веревки, м.

Отсюда $W_3 = \frac{k\delta^2 L^2}{2} = \frac{\delta^2 L^2}{2\psi}$, а искомая длина веревки составит $L = \sqrt{\frac{2W_3}{k\delta^2}} = \sqrt{\frac{2W_3\psi}{\delta^2}}$.

Учитывая, что согласно существующим европейским требования prEN 1891 для статических верёвок «удлинение, возникающее при нагрузке от 50 до 150 кг, не должно превышать 5 %», определим коэффициент упругости веревки. Считаем, что в этом диапазоне используемая веревка находится в зоне упругой деформации, т.е. относительное удлинение веревки составит $\delta = 5\,\%$, а выдерживаемая нагрузка – средняя по диапазону, равная 100 кгс = 1000 Н.
Отсюда получим:

$$k(100;\,0{,}05) = \frac{100 \cdot 10}{0{,}05 \cdot 1} = 20000 \;\; (\text{Н/м})$$

Следовательно, для того, чтобы веревка с заданными характеристиками погасила кинетическую энергию в 910 Дж, она должна иметь длину:

$$L(100;\,0{,}05) = \sqrt{\frac{2W_3}{k\delta^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 910}{20000 \cdot 0{,}05^2}} = 6{,}03\,(\text{м})$$

Если же при всех обозначенных условиях использовать веревку более эластичную (например, с относительным удлинением в 20%), но обладающую аналогичными прочностными характеристиками (т.е. разрывное усилие у обеих веревок будет одинаковым), можно видеть следующее:

$$k(100;\,0{,}2) = \frac{100 \cdot 10}{0{,}2 \cdot 1} = 5000 \;\; (\text{Н/м})$$

$$L(100;\,0{,}2) = \sqrt{\frac{2W_3}{k\delta^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 910}{5000 \cdot 0{,}2^2}} = 3{,}02\,(\text{м})$$

В заключение можно сделать такие выводы:

1. Для того чтобы воздействие рывка на альпиниста массой 100 кг при падении было полностью скомпенсировано силами упругости основной веревки (с параметрами относительного удлинения на 5% при нагрузке в 100 кг), необходимо наличие не менее 6,03 м основной веревки, отсчитываемой от зажима до точки анкерного крепления.
2. Потенциальная энергия упругой деформации веревки прямо пропорциональна ее удельной упругости, и обратно пропорциональна удельной эластичности. Т.е., чем эластичность веревки выше (веревка более «динамическая»), тем больше ее удельная емкость энергопотребления, и тем меньше длины ее надо. Если же ее эластичность невысокая (веревка более «статическая») – длина веревки должна увеличиваться.
3. Подчеркнем, что расчеты отражают минимальное значение требуемой длины веревки для компенсированного падения, с увеличением веревки компенсационные возможности веревки увеличатся, но увеличится и глубина падения.
4. Расчёты показали полное соответствие требованиям prEN 1891 (европейские требования) для статических верёвок, согласно которым сила рывка должна быть меньше 6 кН при факторе рывка 0.3 и весе 100 кг.