Проверка правильности замены истинной траектории движения дугой окружности с постоянным радиусом *R*

Исходные данные:

Длина радиус-вектора: $R = 5798{,}6$ м

Расстояние между точками A и B: $L_{AB} = 301{,}51$ м

Задание:

Определить правильность замены истинной траектории движения дугой, что является частью окружности постоянного радиуса R.

Решение.

1. Вопрос определения истинной траектории движения тела (а также замены ее приблизительной траекторией с определенной степенью погрешности) есть достаточно важным, ибо, зная истинную (или близкую к ней) траекторию движения, можно определить кинематические и динамические характеристики движущегося тела, сделать на их базе силовой расчет, т.е. рассчитать параметры троллейного спуска во времени.

Из практического опыта известно, что троллея (тяжелая однородная нить, роль которой играет стальной канат), подвешенная в точках *A* и *B*, расположенных на разной высоте, и которая находится в нерабочем состоянии (т.е. без приложенной сосредоточенной нагрузки), имеет вид цепной линии (см. Рис.1).

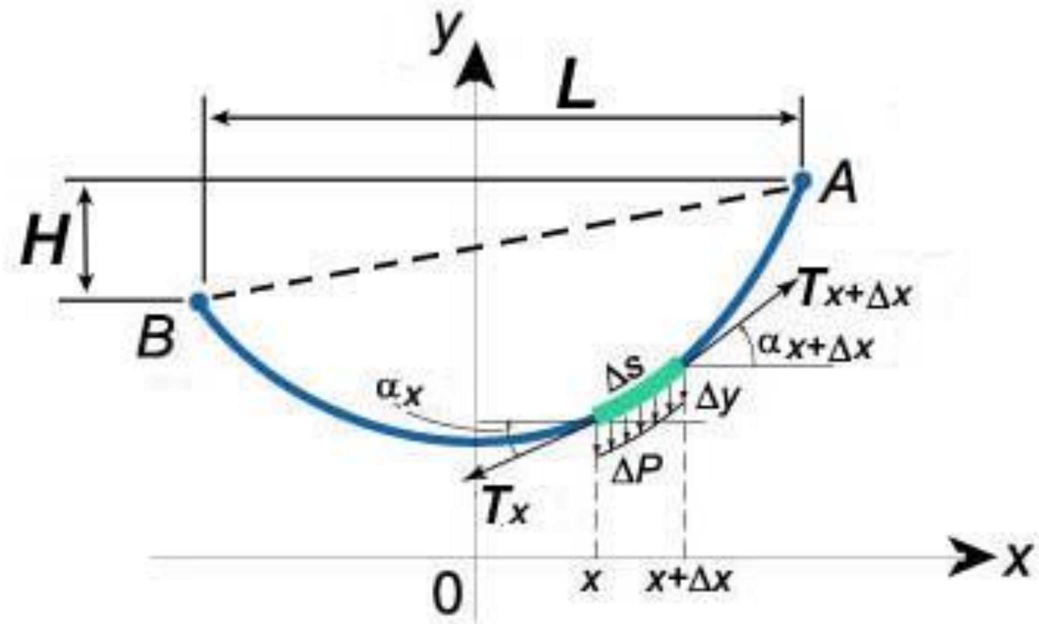

Рис.1

Уравнение данной цепной линии имеет следующий вид:

$$y = \frac{T_0}{qg\mathrm{A}} ch\left(\frac{qg\mathrm{A}}{T_0} x\right)$$

где: T_0 - сила натяжения троллеи в начальный момент времени, Н;

q - объемная плотность материала нити, кг/м^3;

g - ускорение свободного падения, м/с^2;

А площадь поперечного сечения нити, м^2.

2. При прикладывании сосредоточенной нагрузки цепная линия деформируется, и в процессе движения будет образовывать ряд условных треугольников, сумма двух сторон которых будет постоянной (см. Рис.2).

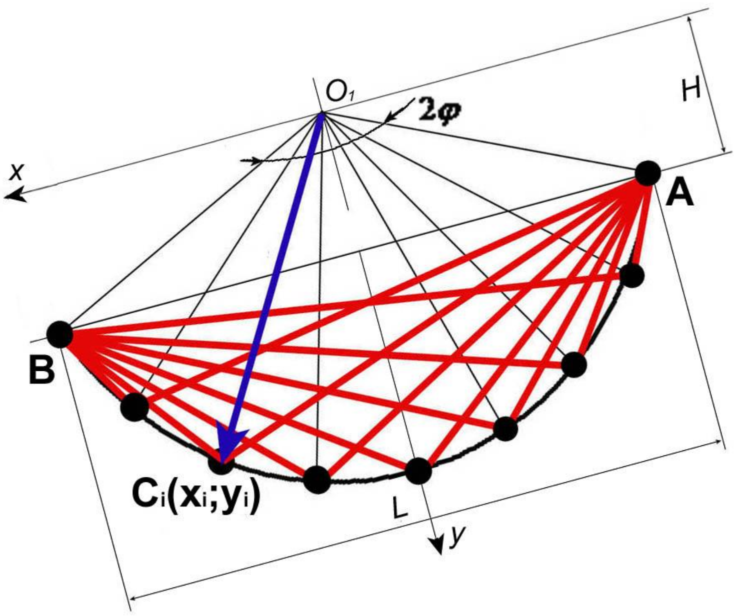

Рис.2

3. Предположим, что в процессе движения тела кривая, соединяющая мгновенные положения тела (точки $C_i(x_i; y_i)$), представит собой дугу части окружности с постоянным радиусом R, описанная в базисе xO_1y.
Уравнения, характеризующие данную дугу, будут:

$$\begin{cases} x_i = \mp R\sin\varphi_i \\ y_i = R\sin\varphi_i \end{cases}$$

где: $\varphi_i = \varphi - \Delta\varphi \cdot i$; $\Delta\varphi = \dfrac{2\varphi}{N}$.

Определим координаты текущих точек C_i, при заданных исходных значения $L = L_{AB} = 301{,}51$ м; и $R = 5798{,}6$ м.
Имеем:

$$H = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{5798{,}6^2 - \left(\frac{301{,}51}{2}\right)^2} = 5796{,}64 \text{ м.}$$

Угол $\varphi = arctg\left(\dfrac{L}{2H}\right) = arctg\left(\dfrac{301{,}51}{2\cdot 5796{,}64}\right) = arctg\,0{,}02601 = 1{,}48977\,°$, а

$$\Delta\varphi = \frac{2\varphi}{N} = \frac{2\cdot 1{,}48977}{10} = 0{,}29796\,°.$$

4. Далее проверим на истинность условие, отражающее постоянство суммы отрезков троллеи, измеренных в точках C_i, принадлежащих окружности с радиусом R, которое имеет следующий вид:

$$\Omega = L_{AC} + L_{CB} = const$$

Учитываем, что:

$$L_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \; ;$$
$$L_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \; .$$

Отсюда получим

$$\Omega = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = const \; ;$$

Заносим полученные результаты в таблицу (см. Табл.1).

Таблица 1

	A	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	B
$\varphi_i,^0 =$	1,490	1,192	0,894	0,596	0,298	0,000	-0,298	-0,596	-0,894	-1,192	-1,490
$x_{Ci} =$	-150,755	-120,609	-90,460	-60,308	-30,154	0,000	30,154	60,308	90,460	120,609	150,755
$y_{Ci} =$	5796,640	5797,346	5797,894	5798,286	5798,522	5798,600	5798,522	5798,286	5797,894	5797,346	5796,640
$\Omega =$	301,510	301,519	301,526	301,531	301,534	301,535	301,534	301,531	301,526	301,519	301,510
$\lvert\Omega_i - \Omega_{CP}\rvert$	0,015	0,006	0,001	0,006	0,009	0,010	0,009	0,006	0,001	0,006	0,015

5. Определяем погрешность допущения используемой замены:

$$\delta = \frac{\sum \lvert\Omega_i - \Omega_{CP}\rvert}{(N+1)\Omega_{CP}} \cdot 100\% = \frac{0,086}{11 \cdot 301,525} \cdot 100\% = 0,003\%$$

где: $\Omega_{CP} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \Omega_i}{N+1} = \dfrac{3316,778}{10+1} = 301,525$

6. Воспользовавшись созданной моделью (прилагается), проведем несколько аналогичных расчетов, изменяя исходные параметры (радиус окружности R, длину хорды L, степень градации исследования N), и сделаем выводы о тождественности истинной траектории движения – окружности с радиусом R.

__**Выводы**__:

1. Истинная траектория движения (дуга, представленная множеством треугольников, у которых сумма длин двух соседних сторон постоянна) в абсолютном измерении __***не тождественна***__ окружности с постоянным радиусом R.
2. Чем больше радиус окружности R, тем с __***большей***__ степенью вероятности истинная траектория совпадает с данной окружностью.
3. Чем больше длина хорды L, тем с __***меньшей***__ степенью вероятности истинная траектория совпадает с данной окружностью.
4. Таким образом, можно заключить, что делать подобные замены в инженерных расчетах считается допустимым, при этом погрешность вычислений будет находиться в пределах от 0,001% ($\frac{R}{L} \geq 3$, длины R и L - на уровне сотен метров) до 10% ($\frac{R}{L} < 3$, длины R и L - на уровне до десяти метров).